UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence 2ème Année Physique

Année Universitaire 2009 – 2010

ELECTROMAGNETISME

EXAMEN JUIN 2010 2ème session (Durée 2 h)

I. Questions de cours : Les Equations de Maxwell

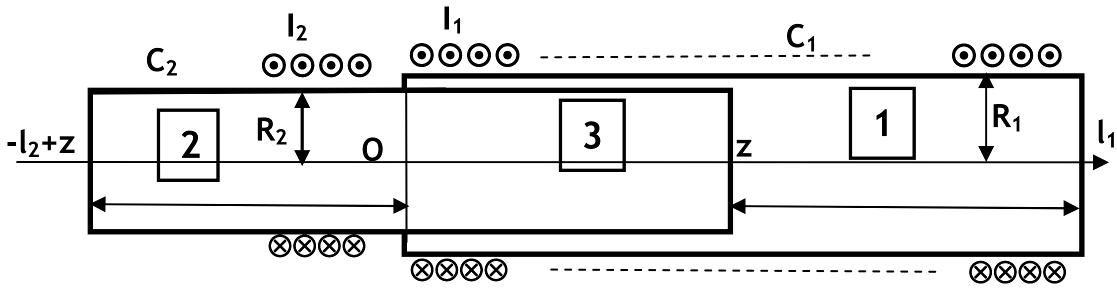
1. Donner les quatre équations locales de Maxwell en présence des sources et en régime fortement variable.
2. Quelle(s) équation(s) sont modifiée(s) en absence des sources ? Donner les équations modifiées
3. Quelle approximation est utilisée dans le cas des régimes variant lentement dans le temps (ARQS) ?
4. Donner les formes intégrales des équations en régime stationnaire.

I. Inductance mutuelle de deux solénoïdes couplés. Solénoïde plongeur

On considère un solénoïde C_1 d'axe z'z de longueur l_1 et de rayon R_1, comportant n_1 spires par unité de longueur. Ses dimensions ($l_1 >> R_1$) sont telles que l'on peut utiliser l'approximation du solénoïde infini. Le solénoïde est parcouru par un courant stationnaire d'intensité $I_1>0$. Le champ magnétique B_1, à l'intérieur du solénoïde C_1 est uniforme et a pour expression : $\mathbf{B_1} = \mu_0 n_1 I_1 \, \mathbf{e_z}$. On admettra que $\mathbf{B_1}$ est nul en tout point extérieur à C_1.

1. Calculer le flux propre Φ_1 du solénoïde C_1 et en déduire le coefficient d'inductance propre L_1 de C_1.

Un second solénoïde C_2, de même axe z'z et de longueur l_2 ($l_2 >> R_2$) et de rayon R_2 légèrement inférieur à R_1 (on admettra que $R_1 \approx R_1 \approx R$), est emboité et peut coulisser sans frottement à l'intérieur du solénoïde C_1. C_2 comporte n_2 spires par unité de longueur parcourues courant stationnaire d'intensité I_2 de même sens que I_1. L'origine O de l'axe z'z est choisie sur la face gauche de C_1 ; la face droite de C_2 est repérée par son abscisse z (z>0). Les longueurs l_1 et l_2 sont suffisamment grandes pour pouvoir négliger les effets d'extrémités. On appellera L_2 le coefficient d'inductance propre de C_2.



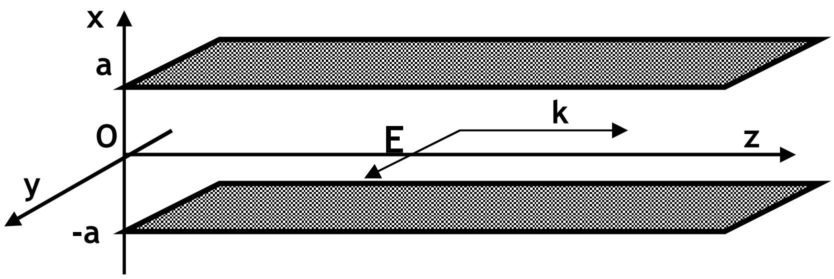
2. Etablir l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M des deux solénoïdes coaxiaux en fonction de n_1, n_2, R , μ_0 et de la longueur de pénétration z de C_2 dans C_1.

3. Calculer le coefficient de couplage des deux circuits $K = \dfrac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Dans quel intervalle ce coefficient peut-il varier ? Celui-ci dépend-il des valeurs respectives de l_1 et l_2 ?

4. Donner les expressions du champ magnétique **B** dans les régions $[z, l_1] \equiv [1]$, $[-l_2+z, 0] \equiv [2]$ et $[0, z] \equiv [3]$ lorsque les deux solénoïdes coaxiaux ont en commun une longueur z. Calculer alors l'énergie magnétique ξ_m du système $\{C_1, C_2\}$ à partir de la densité volumique d'énergie magnétique e_m. En déduire l'expression de l'énergie d'interaction magnétique mutuelle ξ_{mM} entre C_1 et C_2. Vérifier alors l'expression de M établie à la question 2.

II. Propagation guidée d'une onde électromagnétique

On considère deux plans infinis parfaitement conducteurs, parallèles en $x = \pm a$. Une onde électromagnétique de fréquence ω et de vecteur d'onde **k** se propage dans le vide dans la direction Oz parallèle à ces plans. Le champ électrique **E** associé à cette onde est transverse et a pour expression : $\underline{\mathbf{E}} = E_0 \cos(\pi x/2a) \exp[i(kz-\omega t)]\, \mathbf{e}_y$,($E_x=E_z=0$). (On rappelle qu'en régime variable, le champ électromagnétique est nul à l'intérieur de ces conducteurs, les charges et courants sont surfaciques).



1. Déterminer à l'aide de la relation de Maxwell-Faraday les composantes du champ magnétique **B** de l'onde électromagnétique. Peut-on dire ici que l'onde est transversale ?
2. Vérifier que **B** est à flux conservatif.
3. Vérifier que **B** vérifie les relations de passage en x=a et x=-a.
4. Montrer à l'aide de la relation de Maxwell-Ampère que la relation de dispersion, liant k et ω, s'écrit : $k^2 = (\omega^2/c^2)-(\pi/2a)^2$.
5. Ecrire l'expression de **E** pour une fréquence ω inférieure à la fréquence de coupure $\omega_c=(\pi c/2a)$ (On considèrera alors que k est un nombre complexe imaginaire pur). Pourquoi l'onde électromagnétique ne peut pas se propager pour $\omega < \omega_c$?

On se place dans les conditions où l'onde électromagnétique peut se propager entre les deux plans conducteurs ($\omega > \omega_c$ et k est réel).

6. Définir la vitesse de groupe v_g et la vitesse de phase v_ϕ de l'onde électromagnétique.

7. Déterminer les composantes du vecteur de Poynting **R** associé à l'onde électromagnétique.

Calculer la valeur moyenne dans le temps $<\mathbf{R}>_t$. Calculer la valeur moyenne dans le temps de la puissance électromagnétique $<P>_t$.

Calculer la valeur moyenne dans le temps de la densité volumique d'énergie électromagnétique $<e_m>t$. Calculer le rapport $<P>_t /<e_m>t$ (On déterminera la dimension de ce rapport). En déduire la vitesse de propagation v_{em} de l'énergie électromagnétique. Montrer que cette vitesse est la vitesse de groupe v_g.

Rappel : Opérateurs divergence et rotationnel en coordonnées cartésiennes (x, y, z) pour un vecteur **F**:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$